[Wiederholung]

Erinnerung Eine ebene algebraische Kurve ist die Lösung einer Gleichung $f(x,y) = 0$ in zwei Variablen wobei f ein Polynom ist.

Es folgen Beispiele für ebene algebraische Kurven vom Grad 1, Grad 2 und Grad 3.

Allgemeine Formen und Beispiele

Ebene algebraische Kurven vom Grad 1
Die allgemeine Form einer ebenen algebraischen Kurve vom Grad 1 lautet:

$$f = a + bx + cy \qquad a, b, c \in \mathbb{C}$$

Die Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{C}$ variieren sowohl die Steigung, als auch Verschiebung einer Geraden in x-Richtung beziehungsweise in y-Richtung

Beispiel 1 Abbildung 1 zeigt die Gerade $y = 3$.

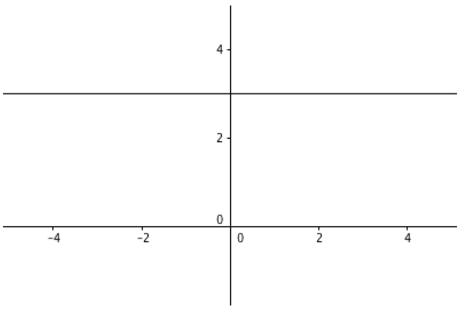

Abbildung : 1 $y = 3$

◊

Ebene algebraische Kurven von Grad 2
Die allgemeine Form einer ebenen algebraischen Kurve vom Grad 2 lautet:

$$f = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 \qquad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{C}$$

Es folgen Beispiele für eben algebraische Kurven vom Grad 2.

Beispiel 2 Hier sieht man die Kurve $f(x,y) = x^2$. Die Lösungsmenge dieser Kurve entspricht der gesamten y-Achse. Denn, wie man sieht, ist die Gleichung $f(x,y) = x^2 = 0$ für $x = 0$ und $\forall y$ erfüllt.

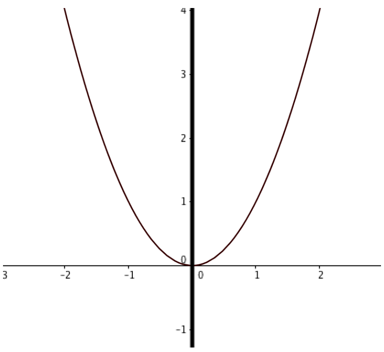

Abbildung : 2

◊

Beispiel 3 Im Gegensatz zur Kurve aus Abbildung 2 wird $f(x, y) = x^2 + y^2 = 0$ nur vom Punkt $(0, 0)$ gelöst. Jedoch ist auch diese Kurve ist eine ebene algebraische Kurve vom Grad 2.

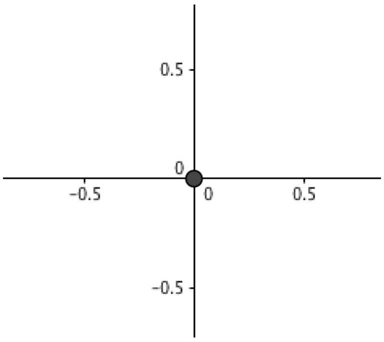

Abbildung : 3

◊

Beispiel 4 Die linke Abbildung zeigt die Kurve $f(x, y) = -x^2 - y = 0$. In der rechten Abbildung sieht man die Kurve $f(x, y) = x - y^2$. Es ist erkenntlich, dass die rechte Kurve der linken Kurve nach einer Drehung um 90° entspricht. Ebene algebraische Kurven dürfen also nicht als Graph einer Funktion verstanden werden.

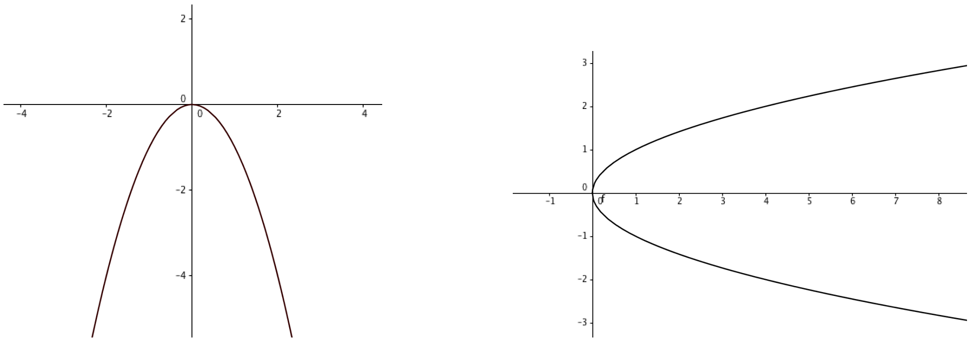

Abbildung : 4

◊

Beispiel 5 Auch der Einheitskreis, der durch die Kurve $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ beschrieben wird ist eine ebene algebraische Kurve vom Grad 2.

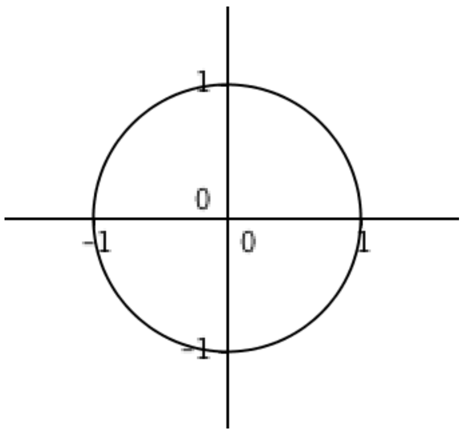

Abbildung : 5

◊

Wir haben in Abbildung 4 gesehen, dass man eine algebraische Kurve nicht als Funktionsgraphen verstehen darf. Umgekehrt kann man nicht jede Funktion als ebene algebraische Kurve formulieren. Dies wird in Abbildung 6 ersichtlich. Das Problem hierbei ist, dass es sich bei $f(x,y) = y - e^x$ nicht um ein Polynom handelt und folglich bei der Lösungsmenge von $f(x,y) = 0$ nicht um eine ebene algebraische Kurve.

Beispiel 6

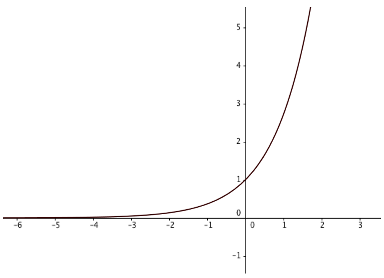

Abbildung : 6

◊

Beispiel 7 Ein weiteres Beispiel für eine ebene algberaische Kurve ist die Hyperbel $f(x,y) = y - \frac{1}{x}$

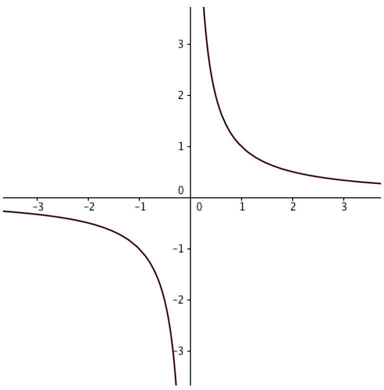

Abbildung : 7

◊

Beispiel 8 Ein etwas interessanterer Fall für eine ebene algebraische Kurven vom Grad 2 sind die Ellipsen. Allgemein haben sie die Form $f(x,y) = (\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 - 1$. Dabei verursachen die Parameter a und b eine Stauchung des Kreises mit Radius 1 in x-Richtung beziehungsweise y-Richtung, wodurch dann eine Ellipse entsteht.

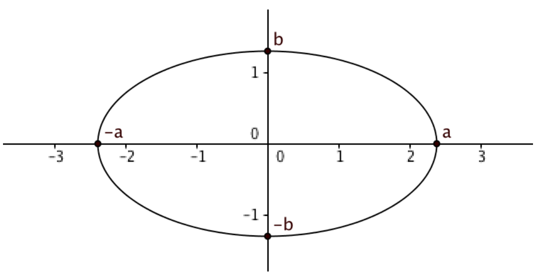

Abbildung : 8 $f(x,y) = (\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 - 1$ ist eine Ellipse deren Halbachsen die Länge a beziehungsweise b haben.

◊

Bemerkung 9 Auch in der Stochastik haben Ellipsen eine besondere Bedeutung. Betrachtet man eine Wahrscheinlichkeitswolke, so stellt man fest, dass diese einer Ellipse ähnelt und man kann bei der Frage ob Gewisse Größen korrelieren einen Zusammenhang zwischen der Varianz, der Kovarianz und den Achsen der Ellipse feststellen die der Wahrscheinlichkeitswolke ähnelt.

Jede der nun gesehenen ebenen algebraischen Kurven kann man als Kegelschnitt auffassen. Betrachten man einen Kegel und legt durch diesen Kegel eine Ebene, so entstehen als gemeinsame Punkte von Kegel und Ebene ebene algebraische Kurven. Folgende Kurven können dabei entstehen:

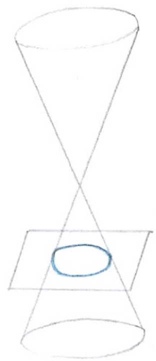

Abbildung : 9 Kreis

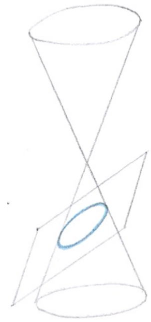

Abbildung : 10 Ellipse

Abbildung : 11 Parabel

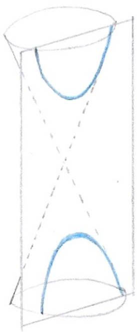

Abbildung : 12 Hyperbel

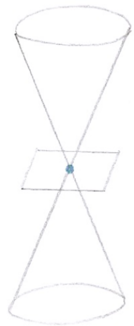

Abbildung : 13 Punkt

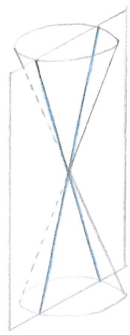

Abbildung : 14 2 Geraden

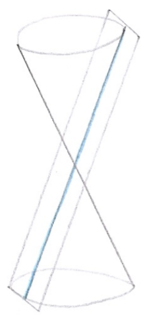

Abbildung : 15 Doppelgerade

◊

Ebene algebraische Kurven von Grad 3

Aus der Schule sind Funktionen vom Grad 3 bereits bekannt. Dort haben sie beispielsweise die Form:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

Übersetzt in eine Kurve hat sie die Form:

$$f(x, y) = ax^3 + bx^2 + cx + d - y = 0 \qquad a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

Vertauscht man die Rollen von x und y, so erkennt man, wie in Abbildung 16 dargestellt, dass sich die Kurve um 90° gedreht hat.

$$f(x, y) = ay^3 + by^2 + cy + d - x = 0 \qquad a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

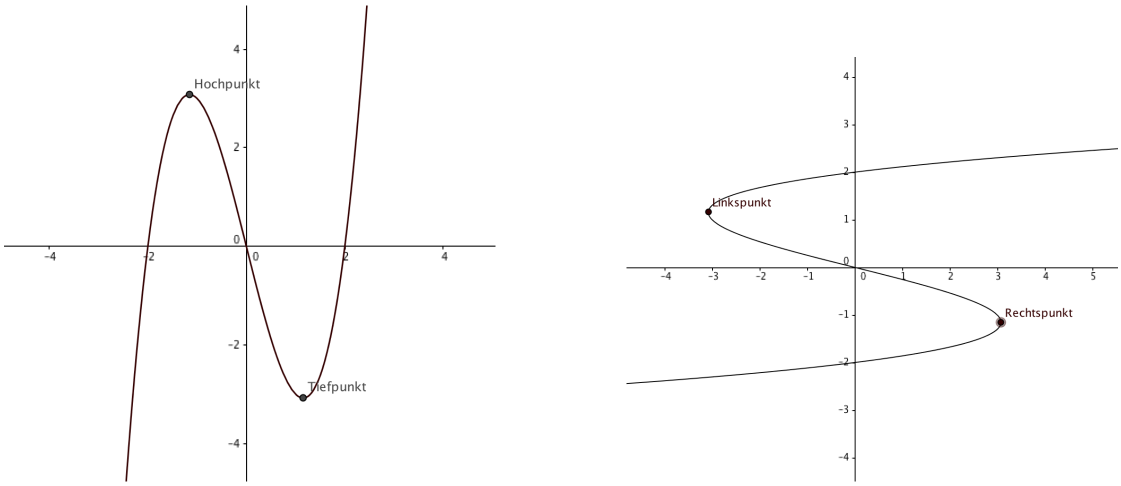

Abbildung : 16

Besonders zu bemerken ist, dass man bei einer Kurve wie in Abbildung 16 dargestellt, die einen Hochpunkt beziehungsweise Tiefpunkt besitzt, nach der Drehung von einem Rechtspunkt beziehungsweise Linkspunkt die Rede ist.

Kommen wir nun zu einigen Beispielen für Kurven vom Grad 3. Allgemein haben sie die Form:

$$f(x, y) = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 + gx^3 + hx^2y + ixy^2 + jy^3 = 0 \qquad a, b, c, d, e, f, g, h, i, j \in \mathbb{C}$$

Bemerkung 10 Durch Klammerung wird klar, dass es sich bei einer kubischen Kurve beispielsweise um ein Produkt von Geraden (Grad 1) mit Quadriken (Grad 2) handelt.

$$0 = \underbrace{(a + bx + cy)}_{Gerade} \underbrace{(\tilde{a} + \tilde{b}x + \tilde{c}y + \tilde{d}x^2 + \tilde{e}xy + \tilde{f}y^2)}_{Quadrik}$$

Es können jedoch auch andere Klammerungen vorgenommen werden. So kann eine kubische Kurve auch als Produkt von drei Geraden dargestellt werden.

$$0 = \underbrace{(a + bx + cy)}_{Gerade} \underbrace{(\tilde{a} + \tilde{b}x + \tilde{c}y)}_{Gerade} \underbrace{(\hat{a} + \hat{b}x + \hat{c}y)}_{Gerade}$$

Beispiel 11 Auch die Hyperbel $f(x, y) = x^2y - 1$ ist eine ebene algebraische Kurve vom Grad 3.

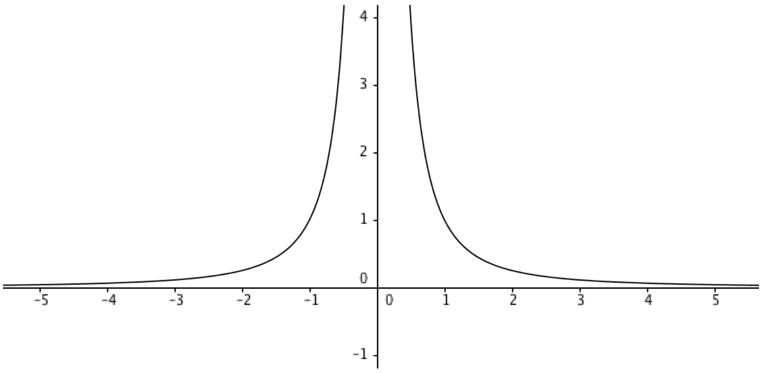

Abbildung : 17 $f(x,y) = x^2y - 1$

$\Diamond$

Beispiel 12 Auch eine Kuspe ist eine ebene algebraische Kurve vom Grad 3. Die Kuspe aus Abbildung 18 hat in $(0,0)$ eine Singularität.

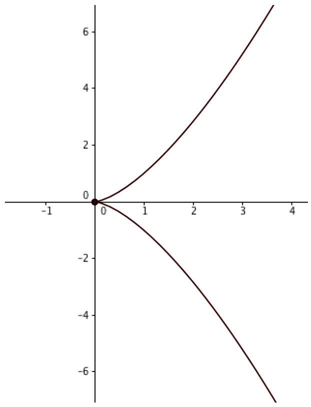

Abbildung : 18 $f(x,y) = y^2 - x^3$

$\Diamond$

Newtons divergente Parabola stellen ebenfalls ebene algebraische Kurven von Grad 3 dar. Im folgenden Beispiel wird erkenntlich wie sie entstehen. Betrachtet man die aus der Schule bekannten Gleichungen $y = ax^3+bx^2+cx+d$ mit $a,b,c,d \in \mathbb{C}$, so entstehen sie durch Quadrieren von y, während die Exponenten von x unverändert bleiben. Da der größte Exponent der Gleichung weiterhin 3 ist, handelt es sich weiterhin um eine ebene algebraische Kurve von Grad 3.
Divergente Parabola nach Newton haben also allgmein die Form:

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d, a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

Beispiel 13 Im linken Bild ist die Kurve $f(x,y) = x(x-1)(x+1) - y = 0$ und im rechten Bild befindet sich die Kurve $f(x,y) = x(x-1)(x+1) - y^2 = 0$.

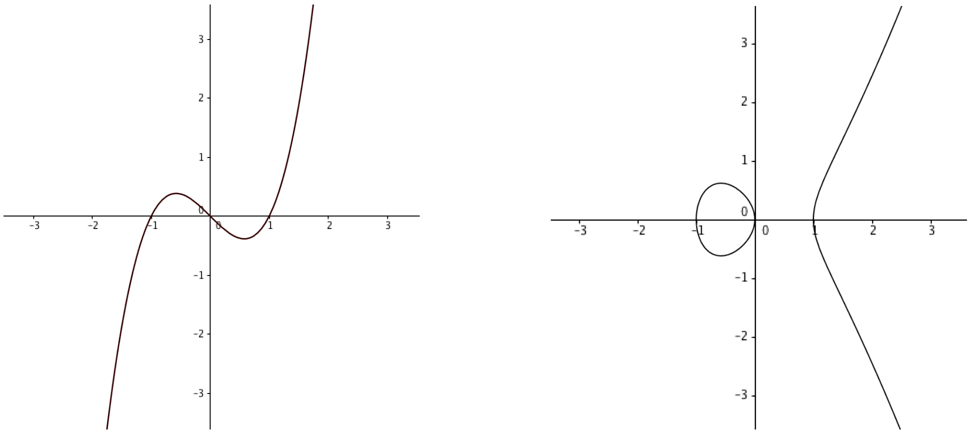

Abbildung : 19

Im linken Bild ist die Kurve $f(x,y) = x^2(x+3)+2+y = 0$ und im rechten Bild befindet sich die Kurve $f(x,y) = x^2(x+3)+2+y^2 = 0$.

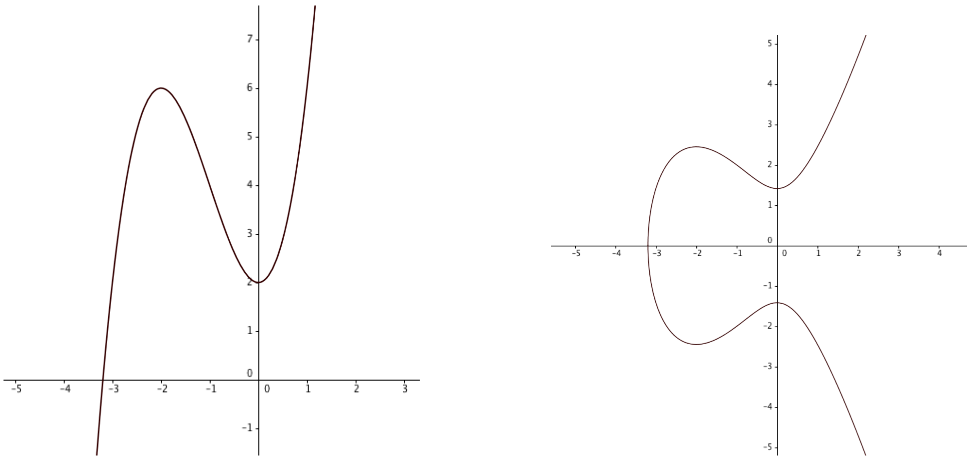

Abbildung : 20

Im linken Bild ist die Kurve $f(x,y) = x^2(x+1)+y = 0$ und im rechten Bild befindet sich die Kurve $f(x,y) = x^2(x+1)+y^2 = 0$.

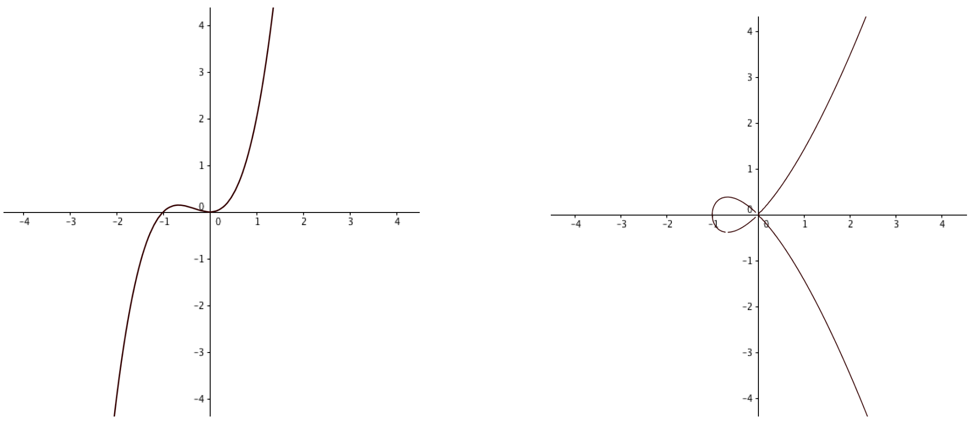

Abbildung : 21

◊

[Wiederholung Ende]

Satz 14 (Satz von Pascal)

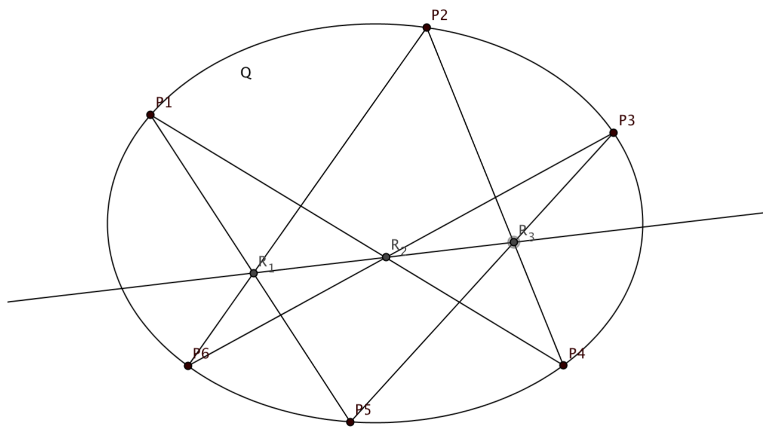

Abbildung : 22

Der Satz von Pascal besagt, dass für eine beliebige Wahl von Punkten $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ auf einer Quadrik Q nach deren Verbindung gemäß Abbildung 17, die Schnittpunkte dieser Verbindungsgeraden R_1, R_2, R_3 wieder auf einer Geraden liegen. Das heißt:

$$R_1 = |P_1P_5| \cap |P_2P_6|$$

$$R_2 = |P_3P_6| \cap |P_1P_4|$$

$$R_3 = |P_3P_5| \cap |P_2P_4|$$

Für den Beweis des Satzes von Pascal ist etwas Vorarbeit nötig.

Satz 15 (Erinnerung) Gegeben zwei Parametrisierungen $C : f(x,y) = 0$ und $D : g(x,y) = 0$, so gilt, dass die beiden Kurven sich höchstens $k := Grad(C) \cdot Grad(D)$ mal schneiden. Gilt $k = \infty$ so haben C und D bereits eine gemeinsame Komponente.

Ersichtlich wird dies an folgenden Abbildungen.

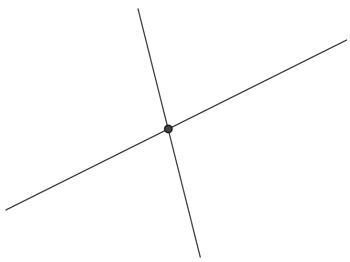

Abbildung : 23 Zwei ebene algebraische Kurven vom Grad 1 können nach Satz 2 höchstens $k = Grad(C) \cdot Grad(D) = 1 \cdot 1 = 1$ Schnittpunkt haben.

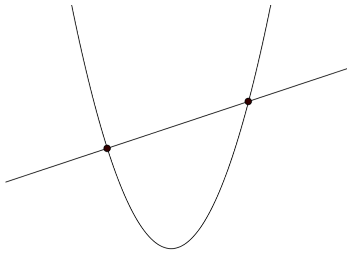

Abbildung : 24 Eine ebene algebraische Kurven von Grad 2 und eine von Grad 1 können hingegen $k = Grad(C) \cdot Grad(D) = 2 \cdot 1 = 2$ Schnittpunkte haben.

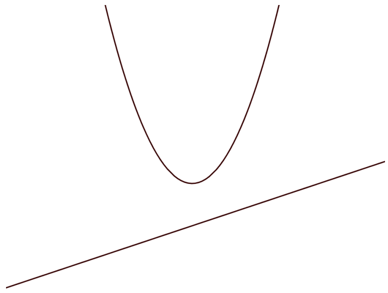

Abbildung : 25 Auch diese Kurven haben 2 Schnittpunkte, jedoch handelt es sich hierbei nicht um reelle Schnittpunkte sondern um komplexe Schnittpunkte, welche in der Abbildung nicht sichtbar sind.

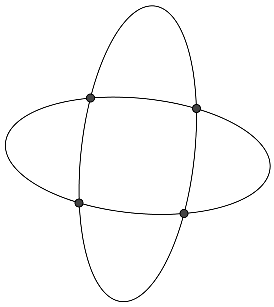

Abbildung : 26 Zwei algebraische Kurven von Grad 2 können höchstens $k = Grad(C) \cdot Grad(D) = 2 \cdot 2 = 4$ Schnittpunkte haben

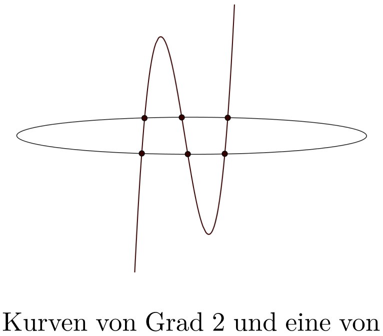

Abbildung : 27 Eine ebene algebraische Kurven von Grad 2 und eine von Grad 3 können hingegen $k = Grad(C) \cdot Grad(D) = 2 \cdot 3 = 3$ Schnittpunkte haben.

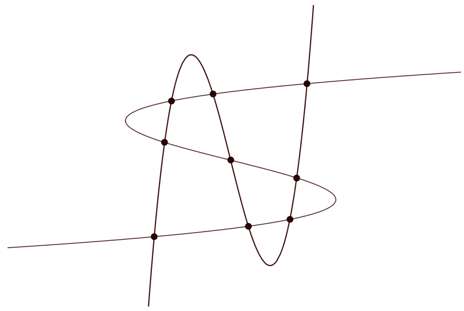

Abbildung : 28 Zwei algebraische Kurven vom Grad 3 können höchstens $k = Grad(C) \cdot Grad(D) = 3 \cdot 3 = 9$ Schnittpunkte haben

$\Diamond$

Kommen wir nun zu einem weiteren Satz, den wir für den Beweis des Satzes von Pascal benötigen werden.

Satz 16 (Satz vom 9. Punkt) Seien C und D zwei kubischen Kurven, die sich in den Punkten $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8$ schneiden, d.h. $C \cap D = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8\}$. Dann geht jede der beiden Kubiken auch durch P_9.

Folgerung 17 Liegen $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ auf einer Quadrik, so liegen P_7, P_8, P_9 auf einer Geraden und umgekehrt.

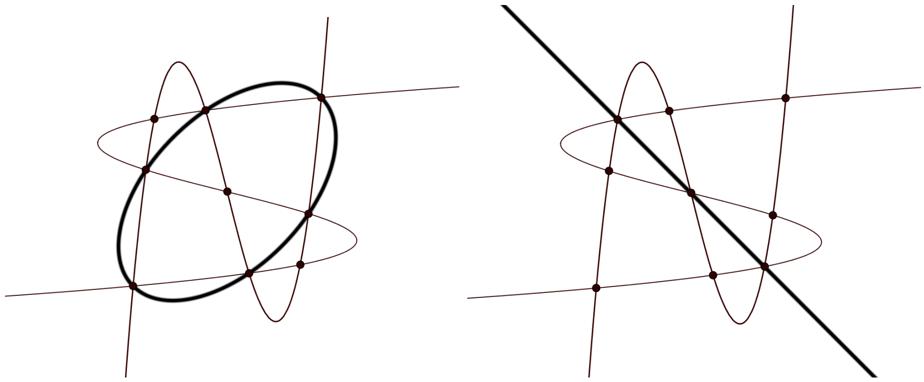

Abbildung : 29

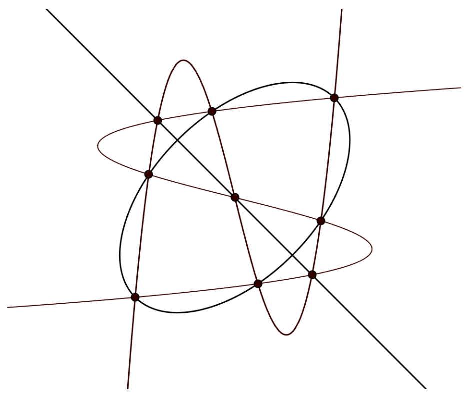

Abbildung : 30

$\Diamond$

Beweis (Satz vom 9. Punkt) Eine kubische Kurve hat 10 Koeffizienten, welche folglich einen Vektorraum der Dimension 10 aufspannen. Seien $P = (p, q)$ ein Punkt und $V(P) = \{(a, b, c, d, e, f, g, h, i, j) \mid f(P) = 0\}$ der Raum der kubischen Kurven, die P enthalten.

Folglich ist $V(P_1, P_2) = \{(a, b, c, d, e, f, g, h, i, j) \mid f(P_1) = 0, f(P_2) = 0\}$ der Raum der kubischen Kurven die P_1 und P_2 enthalten. Führt man dies fort, so enthält $V_i := V(P_1, P_2, ..., P_i)$ die Kurven, die durch die Punkte $P_1, ..., P_i$ verlaufen.

$$\Rightarrow \qquad V_0 \supsetneq V_1 \supsetneq V_2 \supsetneq V_3 \supsetneq V_4 \supsetneq V_5 \supsetneq V_6 \supsetneq V_7 \supsetneq V_8$$

Dabei sind in V_i mit $i \in 0, ..., 8$ jeweils Kurven die durch i Punkte aber nicht durch $i+1$ Punkte verlaufen. Folglich wird also jeweils ein Vektorraum der Dimension $10 - i$ aufgespannt.
Betrachtet man also beispielsweise zwei Parametrisierungen C und D für zwei Kurven $f, g \in V_8$, so müssen diese linear unabhängig sein, da sonst $C \cap D = \infty$ gelten würde.

$$\Rightarrow \qquad V_8 = \{\lambda f + \mu g\}$$

Betrachtet man also einen Punkt P_9, der sowohl auf C als auch auf D liegt, so gilt für diesen Punkt $f(P_9) = 0$ und $g(P_9) = 0$. Da $f, g \in V_8$ muss aber auch gelten: $(\lambda f + \mu g)(P_9) = \lambda f(P_9) + \mu g(P_9) \overset{!}{=} 0$. Dies ist allerdings nur erfüllt wenn beide Kubiken auch P_9 verlaufen.

$\Rightarrow V_8 = V_9$

$\Rightarrow$ Jede Kubik durch $P_1, ..., P_8$ verläuft auch durch den P_9.

$\square$

Kommen wir nun zum Beweis des Satzes von Pascal.

Beweis (Satz von Pascal) Aus Folgerung 17 wissen wir bereits: Liegen die Schnittpunkte zweier kubischer Kurven auf einer Quadrik, so liegen die restlichen drei Schnittpunkte einer Geraden. Um nun den Satz von Pascal zu beweisen, lohnt es sich, Abbildung 17 in veränderter Weise zu betrachten.

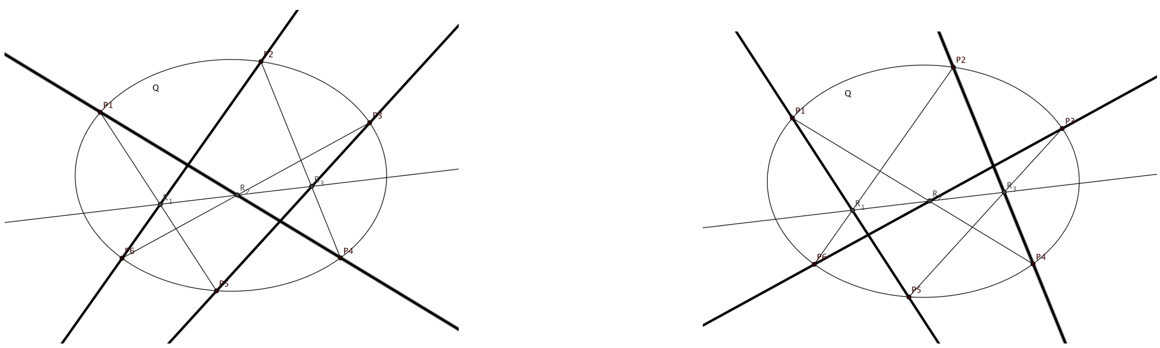

Abbildung : 31

Wie in Abbildung 31 dargestellt, teilt man die Geraden durch die Schnittpunkte $P_1, ..., P_6$ in zwei Kubiken auf. Es handelt sich jeweils um die Vereinigung von 3 Geraden. Die Schnittpunkte $P_1, ..., P_6$ liegen hier auf der Quadrik Q. Die beiden Kubiken haben jedoch drei weitere Schnittpunkte P_7, P_8 und P_9. Es sind also die Voraussetzungen vom Satz vom 9. Punkt erfüllt. Demnach müssen P_7, P_8 und P_9 auf einer Geraden liegen, womit der Satz von Pascal bewiesen ist.

$\square$